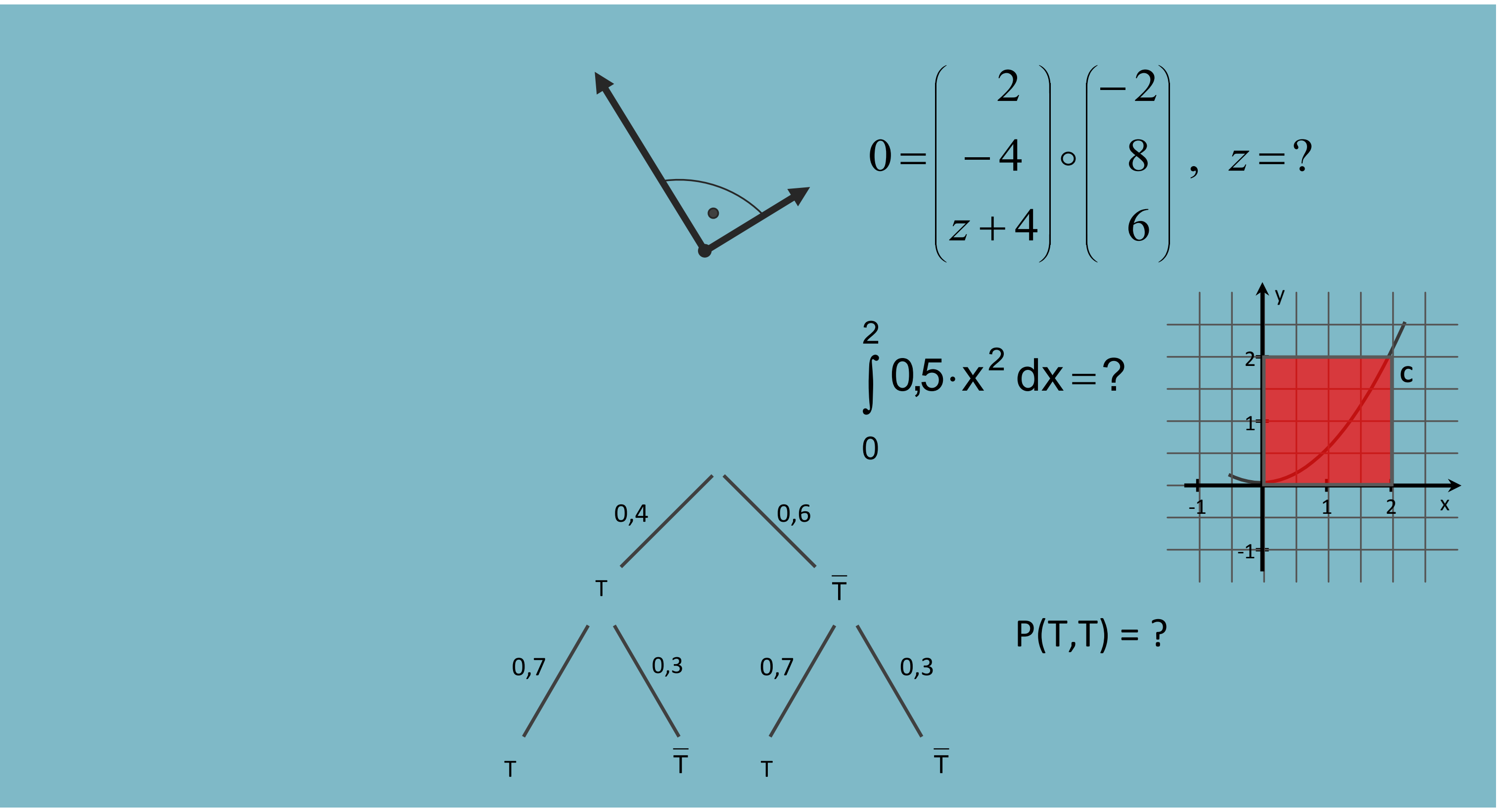
LAND BRANDENBURG

Berlin

UNTERRICHTSENTWICKLUNG



Aufgaben zur hilfsmittelfreien Bearbeitung im Mathematikunterricht

Gymnasiale Oberstufe im Land Brandenburg

Bildungsregion Berlin-Brandenburg

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Aufgaben zur hilfsmittelfreien Bearbeitung im Mathematikunterricht

Gymnasiale Oberstufe
im Land Brandenburg

Team der CAS-Multiplikatoren des Landes Brandenburg,
Viola Adam, Mike Reblin

IMPRESSUM

Herausgeber
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM)
14974 Ludwigsfelde-Struveshof

Tel.: 03378 209-0
Fax: 03378 209-149

Internet: www.lisum.berlin-brandenburg.de

Autorinnen und Autoren Team der CAS-Multiplikatoren des Landes Brandenburg, Viola Adam, Mike Reblin

Redaktion Mike Reblin

Grafiken Mike Reblin

Layout Christa Penserot, Mike Reblin

Druck und Herstellung Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

ISBN 978-3-940987-95-2

Inhalt

Vorwort

Nach derzeitigem Informationsstand (Oktober 2012) werden in 13 Bundesländern zentrale Abiturprüfungen im Fach Mathematik mit CAS[1]-Rechnern geschrieben, teilweise verbindlich, zum Teil wahlweise. Von diesen 13 Ländern wird in acht Ländern schon jetzt (oder laut Ankündigung demnächst) ein hilfsmittelfreier Teil eingesetzt.

Unabhängig davon, ob auch im Land Brandenburg in solches Vorgehen im Abitur gewählt wird, hat die Gestaltung hilfsmittelfreier Aufgaben eine richtungsweisende Funktion für das Lehren und Lernen, insbesondere wenn im Unterricht CAS-Technologie zum Einsatz kommt.

CAS-Rechner sind in der Lage, umfangreiche Rechenschritte in kurzer Zeit zu bewältigen. Damit ist es möglich, im Unterricht Aufgabenstellungen zu bearbeiten, die ohne CAS nicht realisierbar wären. Allerdings kann die Technologie auch benutzt werden, um einfache Basisaufgaben zu erledigen. Damit besteht die Gefahr, dass Lernende notwendige Basiskompetenzen nicht in ausreichender Weise ausprägen. Es besteht sogar die Gefahr, dass Lernende mathematisches Verständnis durch Algorithmenkenntnis ersetzen. Daraus entstehen Defizite, die sich im weiteren Bildungsverlauf als negativ erweisen können.

Um in mathematischen Fragestellungen flexibel reagieren zu können, ist ein angemessenes Grundwissen und ein angemessenes Repertoire an Grundfähigkeiten notwendig. Um dieses zu erlangen, ist es nötig, entsprechende kognitive Leistungen auch ohne technische Unterstützung zu erbringen und zu trainieren.

Welche inhaltsbezogenen Kompetenzen Schülerinnen und Schülern unabhängig von CAS erreichen müssen, ist nicht unstrittig. Im Zuge der Einführung von CAS im Mathematikunterricht wird darüber eine Diskussion stattfinden. Eine detaillierte und vollständige Auflistung aller hilfsmittelfreien Kompetenzen ist momentan nicht möglich. Die Gruppe der CAS-Multiplikatoren des Landes Brandenburg und die Rahmenlehrplangruppe des LISUM haben sich diesem Thema gewidmet. Unter Nutzung eigener Erfahrungen im Unterricht mit CAS und unter Berücksichtigung der Erfahrungen anderer Bundesländer wurde ein Aufgabenkatalog erstellt, der solche hilfsmittelfreien Kompetenzen beschreibt.

Grundlage des Kataloges sind Ergebnisse von Diskussionen in CAS-Tagungen und einem länderübergreifenden Erfahrungsaustausch zum Thema *CAS im Mathematikunterricht* sowie Aufgabensammlungen aus Bundesländern, die bereits über Erfahrungen bei der Gestaltung hilfsmittelfreier Aufgaben im Zentralabitur verfügen. Damit soll allen Mathematiklehrkräften des Landes Brandenburg eine Orientierung gegeben werden, welche Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler unabhängig von CAS erwerben müssen, auf Basis des *Rahmenlehrplanes für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe, Land Brandenburg, Mathematik (2012)*.

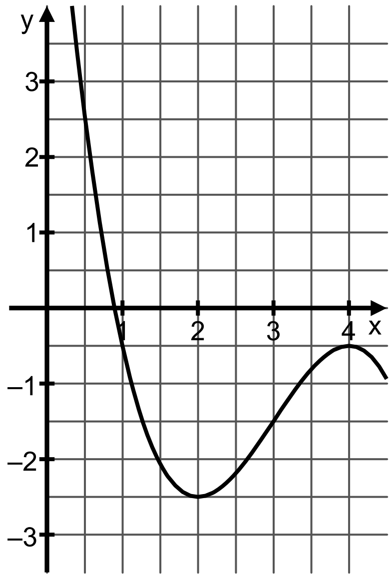
Für die Arbeit mit dieser Handreichung wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

Dr. Gisela Beste
Leiterin der Abteilung Unterrichtsentwicklung
Sek I/II/GOST und E-Learning

[1] **C**omputer-**A**lgebra-**S**ystem

A Analysis

1. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f mit
$f(x) = -0{,}5\cdot x^3 + 4{,}5\cdot x^2 - 12\cdot x + 7{,}5$; $(x\in\mathbb{R})$.



a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5\cdot x^3 + 4{,}5\cdot x^2 - 12\cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.

b) Bestimmen Sie näherungsweise aus dem Graphen die Koordinaten des Wendepunktes von f.

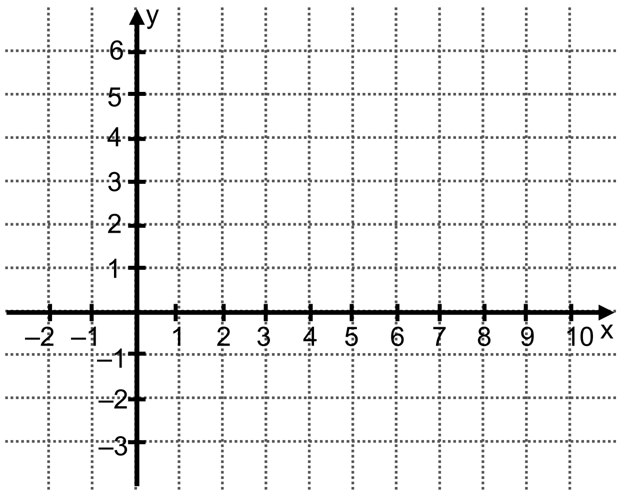
Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler kennen Eigenschaften ganzrationaler Funktionen und können mit diesen argumentieren.

2. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f, wobei folgende Eigenschaften deutlich werden sollen:

$f(3) = 0$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$;

f ist an der Stelle x = 2 nicht definiert.



Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler modellieren Funktionsgraphen entsprechend vorgegebener Eigenschaften.

3. Gegeben ist eine Funktion f durch f(x) = e^{x^2} ; (x∈R). Zeigen Sie, dass die Tangente *t* an den Graphen der Funktion f im Punkt P(1|f(1)) durch die Gleichung t(x) = 2·e·x – e beschrieben werden kann.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bilden die Ableitung von Exponentialfunktionen auch unter Nutzung der Kettenregel. Sie nutzen den Zusammenhang zwischen Ableitung an einer Stelle und Anstieg der Tangenten. Mithilfe der Koordinaten eines Punktes und der Ableitung stellen sie die Gleichung linearer Funktionen auf (Eingangsvoraussetzung).

4. Gegeben ist eine Funktion f mit f(x) = –(x – 2)² + 4; (x∈R).
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler kennen und erläutern Eigenschaften von Funktionen, wie z. B. Achsenschnittpunkte (Eingangsvoraussetzung).

5. Die Funktion f mit dem Graphen G hat die Gleichung f(x) = $-\frac{1}{2}x^2+5x-10$; (x∈R).

Berechnen Sie den Anstieg von G im Punkt P(2|f(2)).

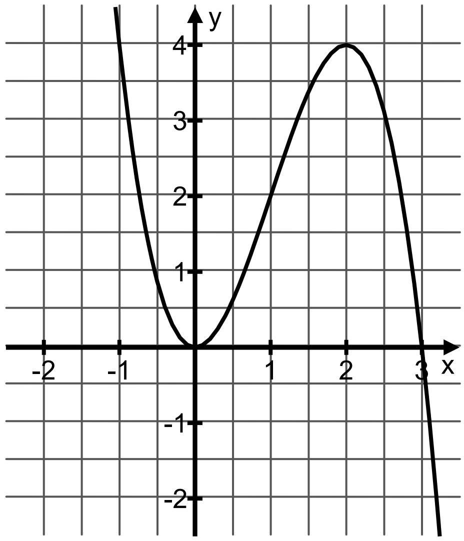
Geben Sie die Gleichung der waagerechten Tangente an den Graphen G an.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler kennen Ableitungen von ganzrationalen Funktionen und interpretieren die Ableitung an einer Stelle als Anstieg. Sie nutzen die Bedingung:
„Wenn x_E eine Extremstelle ist, dann muss an dieser Stelle m = 0 gelten.“

6. Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $f(x) = -x^3 + 5x - 1$ oder der Funktion $g(x) = -x^3 + 3x^2$ dargestellt.

a) Geben Sie an, welche der beiden Funktionen dargestellt ist. Begründen Sie.

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Ableitungsfunktion zu der dargestellten Funktion in dasselbe Koordinatensystem.



Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler kennen Eigenschaften von Funktionen und entwickeln Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen.

7. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ hat im Punkt P(3|2) den Anstieg $m = 1$. Berechnen Sie die Werte für die Parameter b und c.

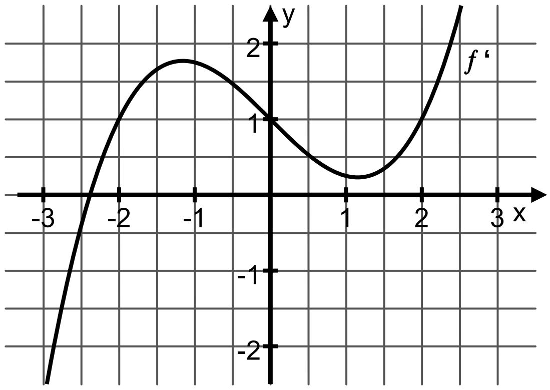
Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler wenden Grundwissen über Ableitungsregeln an und nutzen Kompetenzen aus der Sekundarstufe I, wie z. B. das Aufstellen und Lösen von linearen Gleichungssystemen (Eingangsvoraussetzung).

8. Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4 + 5x^2$; $(x \in R)$ keinen Wendepunkt besitzt.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler kennen Eigenschaften von Funktionen und nutzen Grundwissen über Ableitungsregeln und ggf. Änderungsraten.

9. Dargestellt ist der Graph der 1. Ableitung einer Funktion f.

Welche Aussagen über die Funktion f treffen im dargestellten Intervall zu?



☐ Die Funktion f ist im dargestellten Intervall streng monoton steigend.

☐ Die Funktion f besitzt zwei Wendepunkte.

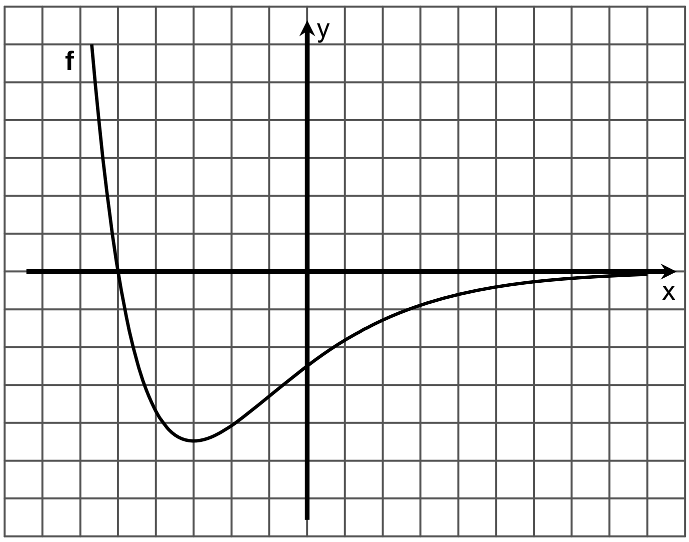
☐ Die Funktion f besitzt einen lokalen Hochpunkt.

☐ Die Funktion f besitzt einen lokalen Tiefpunkt.

☐ Die Funktion f besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.

10. Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion f in dasselbe Koordinatensystem den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion F im dargestellten Intervall.

Begründen Sie Ihre Darstellung des Graphen von F mit einem charakteristischen Zusammenhang zwischen den Graphen von f und F.



Kommentar (zu 9. und 10.)

Die Schülerinnen und Schüler kennen und erläutern Eigenschaften von Funktionen, ermitteln aufgrund von Eigenschaften passende Funktionen und interpretieren den Zusammenhang zwischen Ableiten und Integrieren.

11. In den nachfolgenden Aufgaben ist von den fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das entsprechende Feld jeweils an.

a) Eine Gerade besitzt den Anstieg $-\frac{5}{2}$. Jede Senkrechte zu dieser Geraden hat den Anstieg:

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

b) Welcher der angegebenen Terme beschreibt die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^{2x}$, $(x \in R)$?

☐	☐	☐	☐	☐
$2 \cdot x \cdot e^{2x}$	$2 \cdot e^{2x}$	e^2	$x \cdot e^{2x}$	e^{2x}

c) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^2 - 1) = 0$; $(x \in R)$?

☐	☐	☐	☐	☐
0	1	2	3	4

d) Der Anstieg m der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2} \cdot e^{2x}$; $(x \in R)$, an der Stelle $x = 1$ beträgt:

☐	☐	☐	☐	☐
$m = 3 \cdot e^2$	$m = \frac{3}{2} \cdot e^2$	$m = \frac{3}{4} \cdot e^2$	$m = \frac{3}{2} \cdot e$	$m = 3 \cdot e$

e) An den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + 65 \cdot x$; $(x \in R)$, existieren Tangenten mit dem Anstieg $m = 1$. Wie viele Tangenten sind das?

☐	☐	☐	☐	☐
0	1	2	3	4

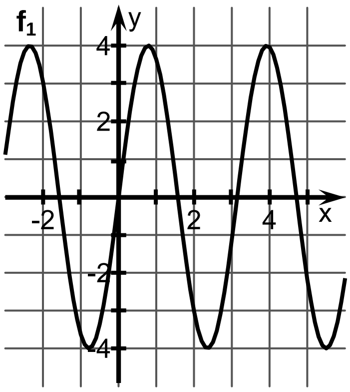
Kommentar

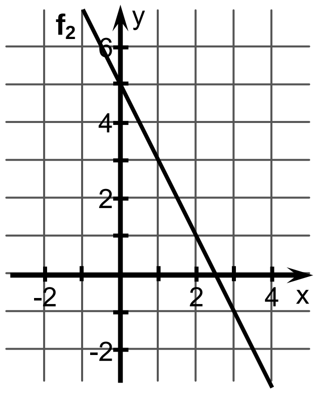
Die Schülerinnen und Schüler kennen grundlegende Vorgehensweisen, um Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen, und können diese ausführen.

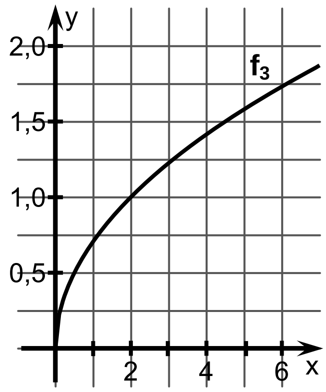
12. Ordnen Sie den nachstehend abgebildeten Graphen (f_1 – f_6) eine der folgenden Funktionsgleichungen (a – i) zu. Beachten Sie: Jedem Graphen lässt sich eine der Gleichungen zuordnen aber nicht zu jeder Funktionsgleichung ist ein Graph dargestellt.

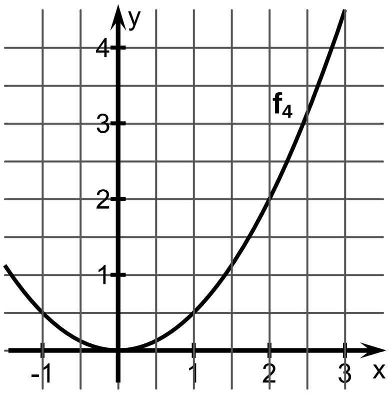
a) $y = \frac{5}{x}$ b) $y = 0{,}5^x$ c) $y = 2 \cdot x + 5$ d) $y = 1{,}5^x$ e) $y = 5 - 2 \cdot x$

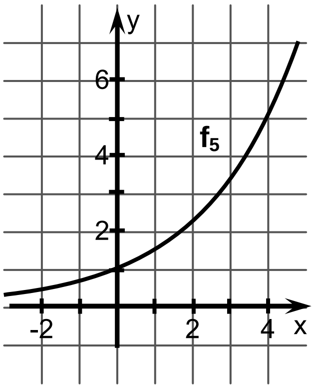
f) $y = 0{,}2 \cdot x^5$ g) $y = 0{,}5 \cdot x^2$ h) $y = \sqrt{0{,}5 \cdot x}$ i) $y = 4 \cdot \sin(2x)$

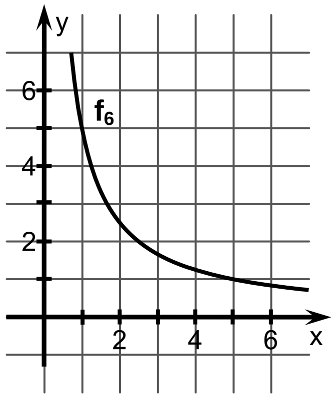












Kommentar

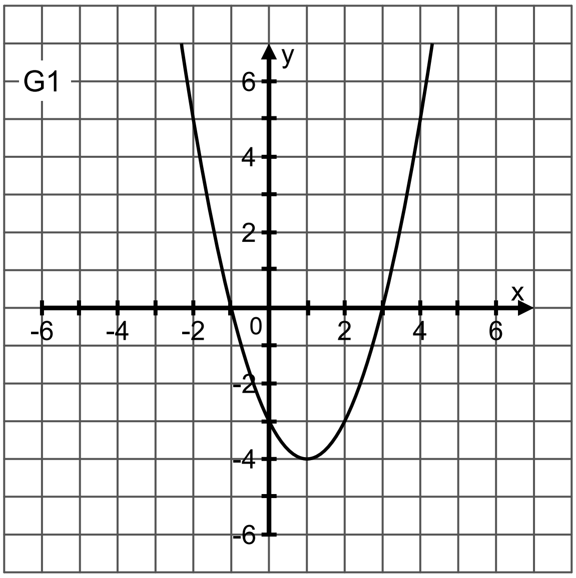
Die Schülerinnen und Schüler erkennen und erläutern Eigenschaften von Funktionen sowohl am Graphen als auch am Term.

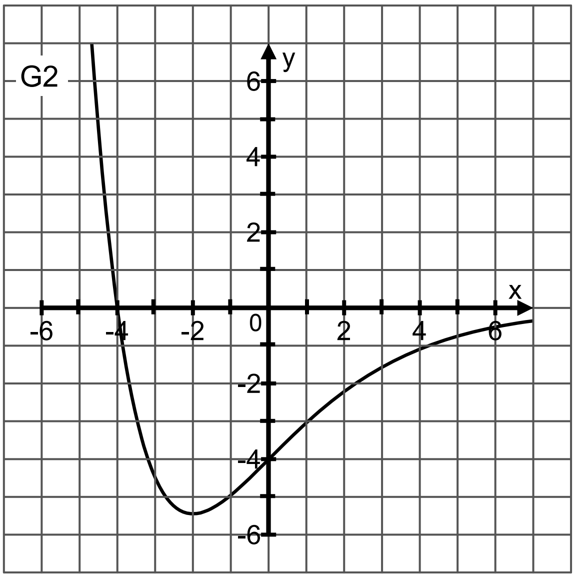
13. ***Kommentar***

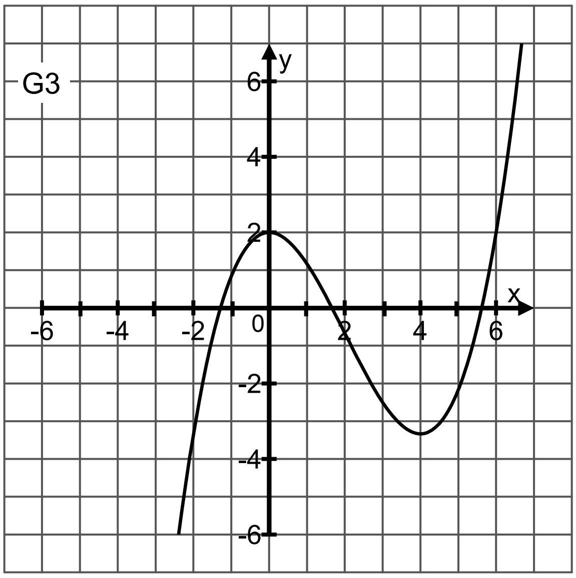
Die Schülerinnen und Schüler kennen Zusammenhänge zwischen Funktionsverlauf und erster Ableitung. Sie können anhand von besonderen Eigenschaften die Graphen von Funktionen und Graphen der ersten Ableitungsfunktion einander zuordnen.

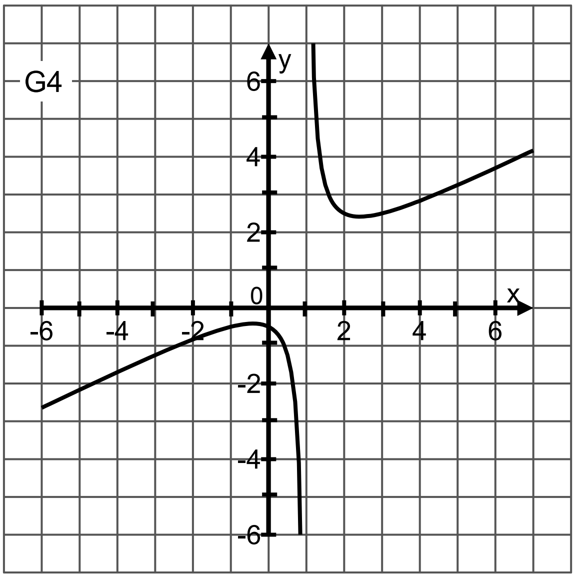
Aufgabe

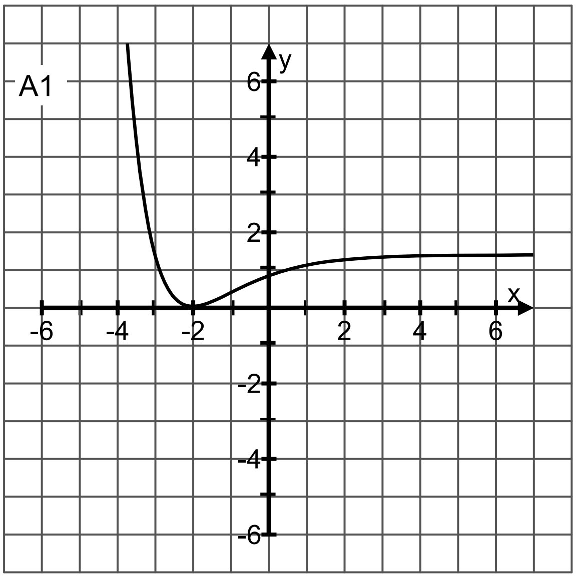
In den Abbildungen G1 – G4 sind Graphen von Funktionen dargestellt.
In den Abbildungen A1 – A6 sind die Graphen möglicher zugehöriger Ableitungsfunktionen (1. Ableitung) dargestellt.
Ordnen Sie jedem Graphen aus {G1; G2; G3; G4} einen passenden Graphen aus {A1; A2; A3; A4; A5; A6} zu.

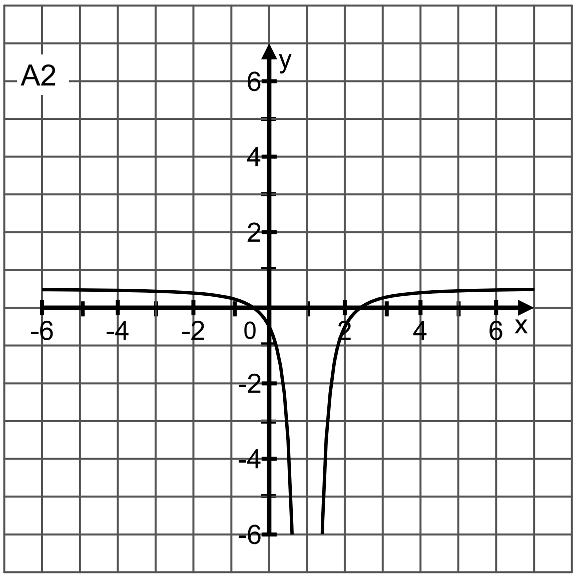


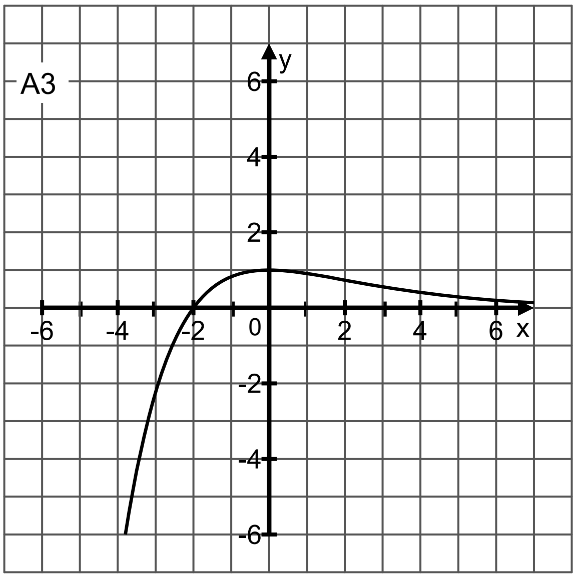


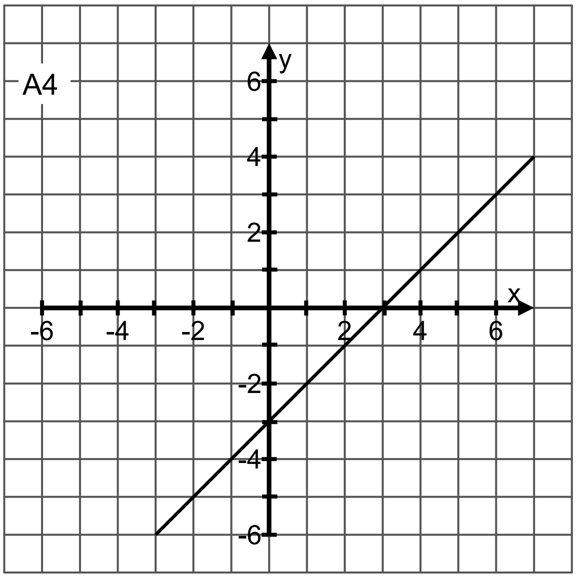


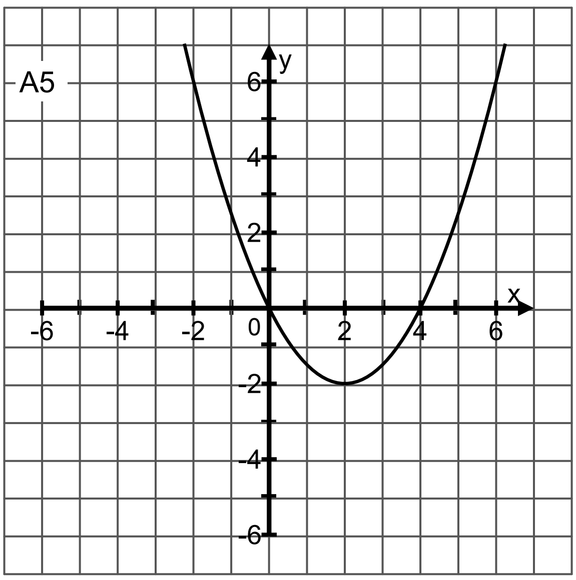


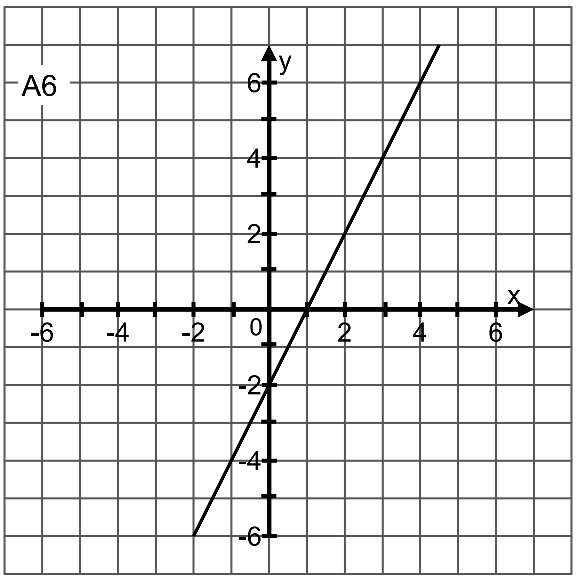

A1
y
x
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6


A2
y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6


A3
y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6


A4
y
x
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6


A5
y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6


A6
y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6

14. Berechnen Sie $\int_0^2 (x+5)\,dx$.

Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln bestimmte Integrale situationsangemessen auf verschiedenen Wegen. Für einfach zu integrierende Funktionsarten können die notwendigen Bearbeitungsschritte auch ohne elektronische Hilfsmittel geleistet werden.

15. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 18$; $(x \in R)$, schließt mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

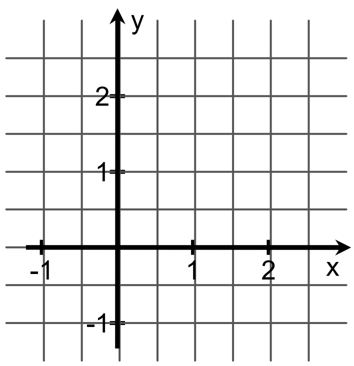
Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler nutzen das bestimmte Integral zur Bestimmung von Flächeninhalten.

Für die Planung der notwendigen Arbeitsschritte nutzen sie Kenntnisse über den Verlauf von quadratischen Funktionen (Eingangsvoraussetzung).

16. Das Quadrat ABCD mit A(0|0), B(2|0), C(2|2) und D(0|2) wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $(x \in R)$, in zwei Teile zerlegt.
Stellen Sie den Sachverhalt im Koordinatensystem dar.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.



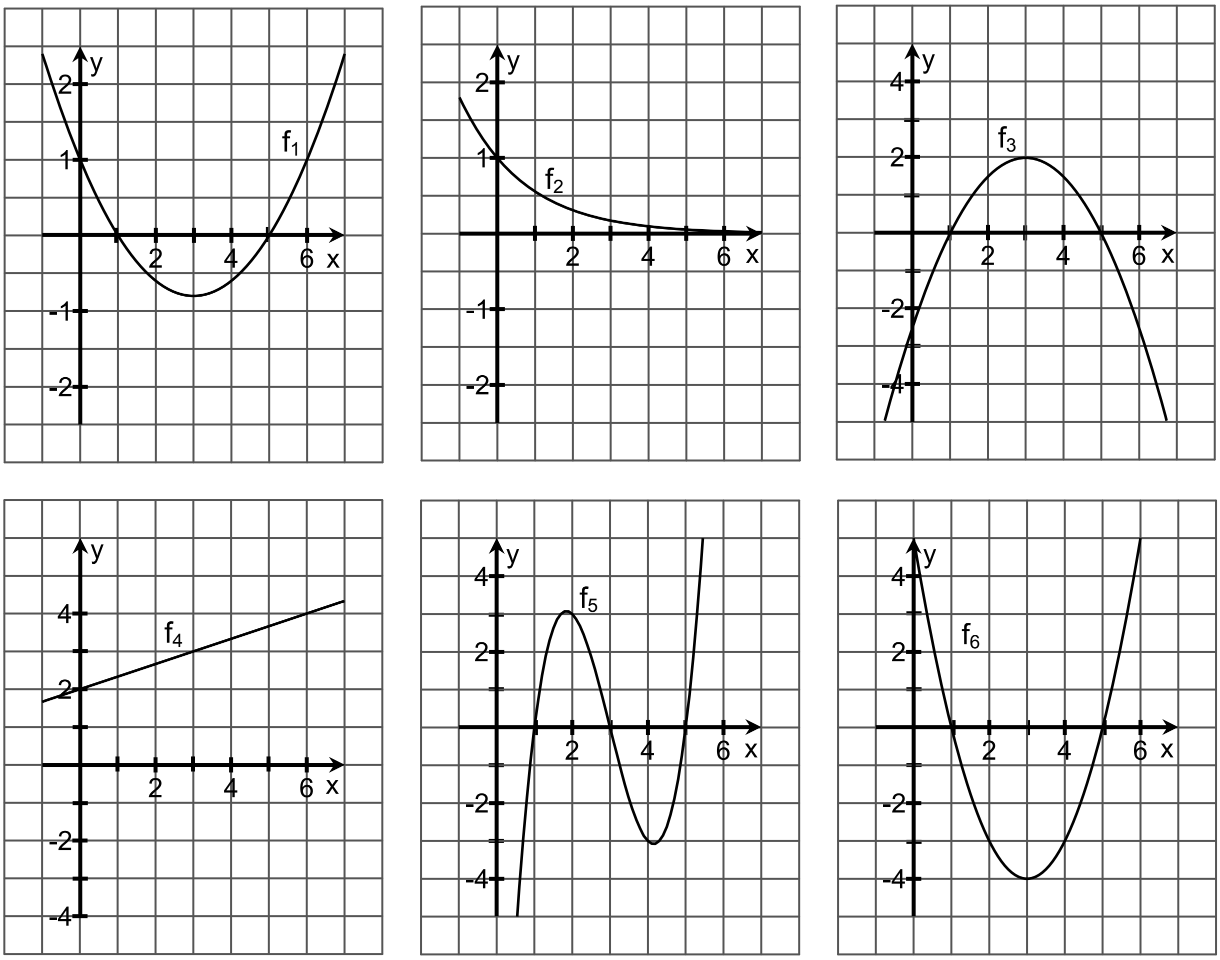
Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler kennen Eigenschaften quadratischer Funktionen (Eingangsvoraussetzung) und können Stammfunktionen von $f(x) = x^n$, $(n \in Z)$ bilden. Sie nutzen das bestimmte Integral zur Bestimmung von Flächeninhalten.

17. Ordnen Sie die dargestellten Funktionsgraphen f_1 – f_6 je einem der im Folgenden beschriebenen Integrale (A – H) zu. Zwei Integrale bleiben übrig.

A: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = -\infty$; **B**: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = -10{,}33$; **C**: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = -2{,}13$; **D**: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = 0$

E: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = 0{,}86$; **F**: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = 5{,}33$; **G**: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = 12{,}0$; **H**: $\int_1^5 f_i(x)\,dx = \infty$



Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler deuten bestimmte Integrale als Flächenbilanz.

B Analytische Geometrie

1. Gegeben sind die Punkte A(1|2|4), B(0|1|5), C(3|–2|5) und P(3|k²|k).

a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

b) Bestimmen Sie einen Wert für k so, dass der Punkt P auf einer Geraden liegt, die durch die Punkte A und B verläuft.

2. Zeigen Sie, dass die Punkte A(2|1|–2), B(3|2|–1) und C(0|–1|6) ein Dreieck bilden.

Kommentar (1 und 2)

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit dem Begriff der Kollinearität. Sie lösen zur Untersuchung von Lagebeziehungen Gleichungssysteme.

3. Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten A(0|0|0), B(–3|1|4), C(2|–4|4) und D(5|–5|0).

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

b) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an.

c) Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$.

Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler nutzen Grundbegriffe der analytischen Geometrie (lineare Abhängigkeit, Kollinearität und Skalarprodukt), um Parallelität und Orthogonalität zu untersuchen. Sie nutzen Linearkombinationen zur Lösung elementargeometrischer Problemstellungen.

4. Geben Sie jeweils die Koordinaten der im Folgenden beschriebenen Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem an, die nicht im Koordinatenursprung liegen:

a) ein Punkt in der y-z-Ebene,

b) ein Punkt der z-Achse,

c) ein Punkt, der von der x-z-Ebene den Abstand 2 LE hat.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler beschreiben innergeometrische Situationen durch Koordinaten und nutzen Vektoroperationen zur Bestimmung von Abständen.

5. Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. In einem kartesischen Koordinatensystem haben deren Eckpunkte die Koordinaten A(5|1|3), B(9|4|3), C(8|–3|3) und S(1|5|–1).

a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist.

b) Geben Sie die spezielle Lage der Grundfläche ABC im Koordinatensystem sowie die Höhe *h* der Pyramide an.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Abstände (Längen) und prüfen mithilfe des Skalarproduktes auf Rechtwinkligkeit.

6. Die Punkte A(1|2|0), B(1|1|0) und C(5|1|0) sind Eckpunkte eines Rechtecks ABCD. Der Punkt S ist die Spitze einer geraden Pyramide mit dem Rechteck ABCD als Grundfläche und der Höhe h = 7.

Eine mögliche Spitze der Pyramide hat die Koordinaten:

☐	☐	☐	☐	☐
S(3|–0,5|7)	S(3|1,5|7)	S(10|8,5|7)	S(2|–0,5|0)	S(2|–0,5|–7)

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler operieren mit Vektoren und deuten diese Operationen geometrisch (Mittelpunkt eines Rechteckes bestimmen). Sie nutzen Vektoroperationen zur Bestimmung von Längen.

7. In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein Quader ABCDEFGH beschrieben durch A(5|3|–3), B(9|7|–1), C(10|5|1), D(6|1|–1), E(3|4|–1), F(7|8|1), G(8|6|3).

Die Kanten werden durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ beschrieben.

a) Stellen Sie den Quader in einem kartesischen Koordinatensystem dar und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H.

b) Weisen Sie die Rechtwinkligkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nach.

c) M ist Mittelpunkt der Grundfläche ABCD.
Geben Sie $\overrightarrow{AM}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an.
Geben Sie die Koordinaten von M an.

d) Z ist Mittelpunkt des Quaders ABCDEFGH.
Geben Sie $\overrightarrow{DZ}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler modellieren in innergeometrischen Situationen Richtungen und Orte durch Vektoren und stellen koordinatengeometrisch erfasste Situationen in Schrägbildern dar. Sie operieren mit Vektoren (Skalarprodukt, Linearkombination), um elementargeometrische Problemstellungen zu bearbeiten. Dabei nutzen und lösen sie einfache Gleichungen und Gleichungssysteme.

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils einen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ oder $\vec{e}$ an, der:

a) parallel zu $\vec{x}$ ist,

b) senkrecht zu $\vec{x}$ ist,

c) den gleichen Betrag wie $\vec{x}$ hat.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler untersuchen Vektoren auf Kollinearität und Orthogonalität und berechnen Beträge von Vektoren.

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2k \\ k-7 \\ 8 \end{pmatrix}$; $(k \in \mathfrak{R})$.

◦ Gibt es Werte für k, so dass gilt: $\vec{a}$ ist parallel zu $\vec{b}$? Geben Sie diese Werte ggf. an.

◦ Gibt es Werte für k, so dass gilt: $\vec{a}$ ist senkrecht zu $\vec{b}$? Geben Sie diese Werte ggf. an.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler untersuchen Vektoren auf Kollinearität und Orthogonalität. Sie nutzen das Skalarprodukt, Gleichungen und Gleichungssysteme.

10. Die Geraden g und h werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathfrak{R})$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $(t \in \mathfrak{R})$.

Welche der nachfolgenden Aussagen bezüglich der Lagebeziehung der beiden Geraden g und h ist wahr? Kreuzen Sie an.

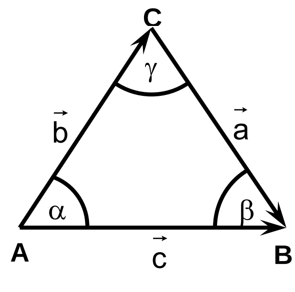
Die Geraden g und h

☐	☐	☐	☐	☐
verlaufen parallel	schneiden sich senkrecht	schneiden sich nicht senkrecht	verlaufen windschief	sind identisch

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler interpretieren lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit und untersuchen die Lagebeziehung von Geraden.

11. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A(6|2|–4), B und C sowie mit den Vektoren $\overrightarrow{CB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ z+4 \end{pmatrix}$; $z \in \mathfrak{R}$;

$\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$.



a) Geben Sie den Wert für den Parameter z so an, dass γ = 90° ist.

b) Prüfen Sie, ob Punkt P(6|5|2) auf der Seite $\overline{AB}$ liegen kann.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler nutzen das Skalarprodukt zur Untersuchung von Orthogonalität. Sie untersuchen die Lagebeziehung von Punkt und Gerade.

12. Gegeben sind die Punkte A(1|–1|0), B(–5|5|6) und C(–3|3|–4). Die Gerade g_{AB} verläuft durch die Punkte A und B.

a) Welche der folgenden Aussagen zur Lage des Punktes C ist richtig?

☐	☐	☐
C liegt auf der Strecke $\overline{AB}$.	C liegt auf g_{AB}.	C liegt nicht auf g_{AB}.

b) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die zu g_{AB} senkrecht verläuft.

c) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die g_{AB} enthält.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Lagebeziehung Punkt-Gerade, operieren mit Vektoren (Addition und Vervielfachung) und stellen Ebenengleichungen auf.

13. Gegeben sind die Ebene E: x + y = 4 und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; (t \in \Re)$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im kartesischen Koordinatensystem.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler interpretieren geometrische Objekte in Koordinaten- und vektorieller Darstellung. Sie nutzen Gleichungen und Gleichungssysteme zur Untersuchung der relativen Lage von Geraden und Ebenen.

14. Gegeben sind die Ebene E_1: $6 \cdot x - y - 4 \cdot z = 12$ und E_2: $-3 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = -6$.

a) Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.

b) In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass anschließend E_1 und E_2 identisch sind.

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Lösung.

c) Geben Sie eine Ebene E_3 an, die parallel zu E_1 durch den Koordinatenursprung verläuft.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler kennen Grundkonzepte zur Untersuchung von Lagebeziehungen zweier Ebenen und sind in der Lage entsprechende Algorithmen auszuführen.

15. Gegeben sind die Ebene E: $2 \cdot x + y - z = 0$ und der Punkt P(7| 4 |0).

a) Zeigen Sie, dass Punkt P nicht in der Ebene *E* liegt.

b) Beschreiben Sie die besondere Lage von P im Koordinatensystem.

c) P wird an der y-z-Koordinatenebene gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des so entstehenden Spiegelpunktes P‘ an.

d) Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist die Lotgerade von P auf *E*.

Bestimmen Sie den Lotfußpunkt F in der Ebene *E*.

e) Weisen Sie nach, dass der Punkt Q(–5|–2| 6) der Spiegelpunkt von P an der Ebene *E* ist.

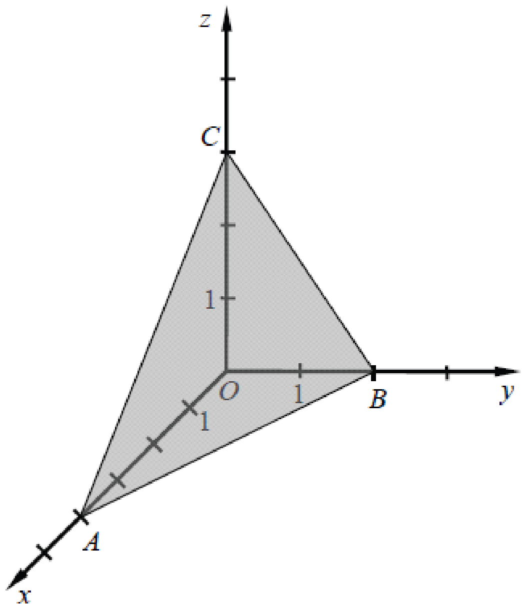
Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben geometrische Objekte in Koordinaten- und in vektorieller Darstellung. Sie untersuchen Lagebeziehungen und verfügen über Grundkonzepte zur Untersuchung besonderer Lagen.

16. In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C eindeutig bestimmt ist, in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Die Punkte A, B und C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E.



Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler stellen Ebenengleichungen auf.

C Stochastik

1. Ein Kartenspiel hat folgende Karten (Motive): 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As. Jedes Motiv ist jeweils in den Farben Rot (Herz und Karo) und auch in den Farben Schwarz (Kreuz und Pik) vorhanden. Es gibt somit 32 verschiedene Spielkarten.

Aus solch einem Kartenspiel wird nun eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Karte:

A) eine Dame oder ein König?

B) schwarz oder eine Zahl?

C) rot oder schwarz?

D) rot oder Karo?

E) keine rote Zahl?

F) ein roter Bube?

G) rot und schwarz?

H) ein Bild (Bube, Dame, König, Ass) oder Kreuz?

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der LAPLACE-Regel (Eingangsvoraussetzung) .

2. Bei einer Meinungsumfrage zur Rauchgewohnheit wurden die Daten von 55 Frauen und 45 Männern erfasst. Insgesamt sind 65 dieser befragten Personen Raucher, unter ihnen 35 Frauen.

a) Wie viele der befragten Männer rauchen nicht?

b) Berechnen Sie den relativen Anteil der weiblichen Nichtraucher unter den beiden Geschlechtern.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler wenden Baumdiagramme oder Vier-Felder-Tafeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Anwendungskontexten an.

3. Beim Handball treffen Max mit 40 % Wahrscheinlichkeit und Moritz mit 70 % Wahrscheinlichkeit ins Tor. Sie werfen nacheinander.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen

A) keinen Treffer, **B)** einen Treffer, **C)** zwei Treffer erzielen?

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen (Eingangsvoraussetzung).

4.1) In einer Urne befinden sich 3 schwarze, 4 grüne und eine unbekannte Anzahl (n) weiße Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen beträgt 0,5.

Wie viele weiße Kugeln sind enthalten?

4.2) Hans zieht aus einer Urne mit 5 roten, 3 grünen und 2 blauen Kugeln ohne Zurücklegen zwei Kugeln.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er dabei nur rote Kugeln?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Hans bei seinem zweiten Zug eine blaue Kugel aus der Urne holt?

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen (Eingangsvoraussetzung) und nutzen Urnenmodelle zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .

5.1) Susi hat die Geheimnummer ihres fünfstelligen Zahlenschlosses für ihr Fahrrad vergessen. Sie kann sich nur noch daran erinnern, dass jede Ziffer nur einmal vorkommt und jede größer als 4 ist.

Berechnen Sie, wie viele Zahlenkombinationen dieser Art es gibt.

5.2) Auf einem vierstelligen Zahlenschloss sind pro Stelle die Ziffern 0 – 9 wählbar.

Wie viele Zahlenkombinationen sind möglich, wenn keine weiteren Informationen vorliegen?

☐	☐	☐	☐	☐
$4 \cdot 10$	10^4	4^{10}	$4!$	$10!$

6. Aus einer Gruppe von 5 Schülern, 4 Lehrerinnen und 5 Lehrern sollen zwei Schüler, eine Lehrerin und ein Lehrer für einen Ausschuss gewählt werden. Wie viele unterschiedliche Zusammensetzungen für diesen Ausschuss sind theoretisch möglich?

Kommentar (5 und 6)
Die Schülerinnen und Schüler kennen kombinatorische Abzählverfahren und bestimmen damit Anzahlen.

7. Peter spielt Monopoly. Dabei wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Beim nächsten Wurf will Peter unbedingt eine Augenzahl von 8 oder mehr erzielen. Er schummelt etwas, so dass einer der Würfel mit Sicherheit eine 5 zeigt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens die Augensumme 8 erzielen wird?

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der LAPLACE-Regel (Eingangsvoraussetzung).

8. Eine Firma fertigt Radios in drei verschiedenen Städten. In der Stadt A werden 20 % ihrer Waren hergestellt, in der Stadt B 30 % und der Rest in der Stadt C. Leider passieren auch Produktionsfehler. So sind 10 % der Geräte aus A, 1 % der Geräte aus B und 5 % der Geräte aus C fehlerhaft.

a) Ein Prüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig ein Gerät aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es fehlerhaft?

b) Der Firmenchef wählt aus der Gesamtproduktion ein offensichtlich fehlerhaftes Gerät aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es in der Stadt A hergestellt worden? Beschreiben Sie den Lösungsansatz.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen und dem Anwenden der Pfadregel (Eingangsvoraussetzung). Sie nutzen Kenntnisse über bedingte Wahrscheinlichkeit in Sachzusammenhängen.

9. Eine Münze wird dreimal geworfen. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

A: Mehr als zweimal Wappen, B: Höchstens zweimal Wappen,
C: Mindestens einmal Zahl, D: Genau einmal Wappen.

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen und dem Anwenden der Pfadregel (Eingangsvoraussetzung).

10. Ein Test besteht aus vier Fragen. Zu jeder der vier Fragen gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils nur eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens drei der Fragen richtig beantwortet wurden.
Jemand absolviert diesen Test völlig unvorbereitet und kreuzt mit Hoffnung auf Glück an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er diesen Test besteht?

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler nutzen kombinatorische Hilfsmittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

11. Eine Reisegruppe von fünf Personen macht am letzten Tag ihres Urlaubs auf der Insel Usedom einen Abstecher in den polnischen Teil der Insel. Sie kaufen dort u. a. preiswert Zigaretten ein. Zwei der Reisenden haben dabei die erlaubte Höchstmenge überschritten und gelten somit als Schmuggler. Auf der Rückfahrt kontrollieren Zollbeamte die Reisegruppe. Sie wählen zwei der fünf Personen zwecks Durchsuchung aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ertappen die Beamten keinen Schmuggler?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens einer der beiden Schmuggler ertappt?

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen und dem Anwenden der Pfadregel (Eingangsvoraussetzung).

12.1 In einer Studie wurde ein Medikament getestet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt. Dabei bedeuten:

M: Medikament genommen

$\overline{M}$: Placebo genommen

G: gesund geworden

$\overline{G}$: nicht gesund geworden

	G	$\overline{G}$	Summe
M	6 000	300	6 300
$\overline{M}$	400	3300	3 700
Summe	6 400	3 600	10 000

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zu gesunden, bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Medikament genommen hat?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nicht zu gesunden, bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Placebo genommen hat?

12.2 In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.

Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt.

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft“ und das Ereignis B: „Person erkrankt“.

Gruppe	B	$\overline{B}$	Summe
A	60	540	600
$\overline{A}$	120	180	300
Summe	180	720	900

Berechnen Sie:

$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P_{\overline{A}}(B)$

Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler nutzen ihre Kenntnisse über bedingte Wahrscheinlichkeit und wenden kombinatorische Hilfsmittel, wie z. B. Vierfeldertafeln, zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Sachkontexten an.

13. Bei welchen der folgenden Zufallsexperimente handelt es sich um BERNOULLI-Ketten? Geben Sie, wenn möglich, die Trefferwahrscheinlichkeiten ***p*** und die Längen ***n*** der BERNOULLI-Ketten an.

A - Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Anzahl der Sechsen notiert.

B - Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Augensumme notiert.

C - Aus einer Urne mit drei weißen und sieben roten Kugeln wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die erste rote Kugel erscheint.

D - Aus einer Urne mit drei weißen und sieben roten Kugeln wird viermal, mit Zurücklegen, jeweils eine Kugel gezogen.

E - Bei einem Glücksrad erscheint in 50 % aller Fälle eine „1“, in 25 % der Fälle eine „2“ und in 25 % der Fälle eine „3“. Das Rad wird viermal gedreht und die Ziffern als vierstellige Zahl notiert.

F - Das Glücksrad aus ***E*** wird achtmal gedreht. Jedes Mal, wenn die „3“ erscheint, erhält man 10 Cent.

G - Das Glücksrad aus ***E*** wird so oft gedreht, bis die „3“ erscheint, höchstens jedoch fünfmal.

Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler erkennen BERNOULLI-Ketten. Dies ist notwendige Voraussetzung, um mit ihnen modellieren zu können.

14. Ein Glücksrad hat drei gleich große Sektoren mit den Symbolen *Kreis, Kreuz* und *Stern*. Es wird viermal gedreht und das Ergebnis registriert. Die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse sollen berechnet werden:

A: Es tritt dreimal Stern auf.

B: Es tritt mindestens dreimal Stern auf.

C: Es tritt höchstens einmal Stern auf.

D: Es tritt höchstens zweimal Stern auf.

Ordnen Sie den Ereignissen je einen der vorgeschlagenen Lösungswege zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zu.

☐___ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$

☐___ $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4$

☐___ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$

☐___ $\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$

☐___ $\dfrac{\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}$

☐___ $1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler wenden kombinatorische Hilfsmittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten an.

15. Eine Zufallsgröße X hat die in der Tabelle gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	4	8	12	16
$P(X=x_i)$	c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	d

$c, d \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert für d beträgt der Erwartungswert dieser Zufallsgröße E(X) = 7

☐ $d = \frac{5}{8}$

☐ $d = \frac{1}{8}$

☐ $d = 0{,}1$

☐ $d = \frac{1}{8} + c$

☐ $d = c$

Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler berechnen Erwartungswerte, um diese für Interpretationen nutzen zu können.

16. Die Hälfte aller Studierenden einer Seminargruppe ist höchstens 1,75 m groß, davon sind 60 % Frauen. 60 % aller Studierenden dieser Seminargruppe sind Männer.

Ermitteln Sie den Anteil der Studierenden dieser Seminargruppe, die Männer und zugleich größer als 1,75 m sind

Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler wenden Vierfeldertafeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Anwendungskontexten an.

17. Ein idealer Würfel wird genau zweimal geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis: „Es werden zwei Primzahlen oder zwei gleiche Augenzahlen geworfen.“

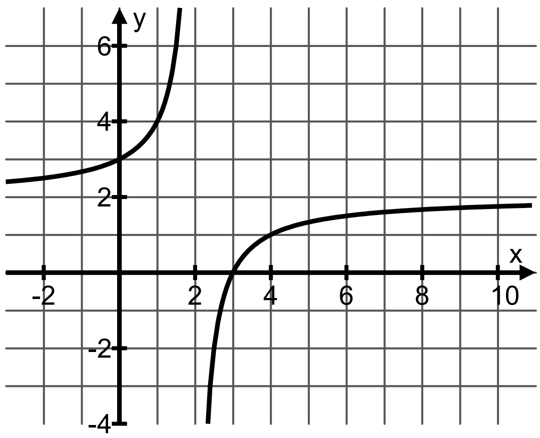
Kommentar
Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der LAPLACE-Regel. Dabei nutzen sie Baumdiagramme oder Mengenbeziehungen.

Lösungen

Zu A – Analysis

zu A 1. $x_0 \approx 0{,}8$ ist ablesbar. f(x) ist ganzrationale Funktion 3. Grades, demzufolge ist die erste Ableitung eine quadratische Funktion mit höchstens zwei Nullstellen. Daraus folgt, das f(x) höchstens zwei Extrempunkte haben kann. Beide Extrempunkte sind erkennbar und liegen unterhalb der x-Achse. Da f(x) für x>4 monoton fallend ist und als ganzrationale Funktion keine Unstetigkeit aufweist, kann sie im weiteren Verlauf die x-Achse nicht mehr schneiden.

zu A 2. z. B.:



Dargestellt ist der Graph von

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x-2}.$$

zu A 3. $y_P = f(1) = e$, $m_t = f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$, $f'(1) = 2 \cdot e$

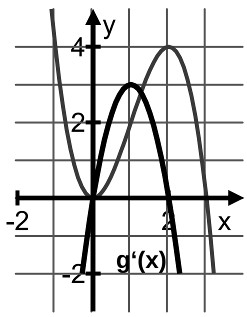
→ Die Tangente $y = m \cdot x + n$ hat im Punkt P(1|e) den Anstieg m = 2e.
→ Das Einsetzen dieser Angaben in die Geradengleichung ergibt: $e = 2e \cdot 1 + n$.
→ Also ist $n = -e$. Somit lautet die Tangentengleichung $y = 2e \cdot x - e$, w.z.b.w..

zu A 4. Die quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt S(2|4). Wegen des negativen Vorzeichens vor dem Term x^2 ist der Graph eine nach unten geöffnete Parabel, die wegen der Tatsache, dass der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse liegt, diese zweimal schneiden muss.

zu A 5. $f'(x) = 5 - x$, $m = f'(2) = 3$.

Eine waagerechte Tangente existiert nur an Extrempunkten, d.h. im Falle einer quadratischen Funktion am Scheitelpunkt. Dieser liegt bei S(5|2,5), die konstante Funktion, deren Graph die fragliche waagerechte Tangente ist, hat dementsprechend folgende Gleichung: y = 2,5.

zu A 6. Es ist der Graph von $g(x) = -x^3 + 3x^2$ dargestellt, da nur für g(x) gilt: g(0) = 0 und mit $g'(x) = -3x \cdot (x-2)$ lässt sich leicht erkennen, dass $g'(0) = g'(2) = 0$. Damit stimmt auch die mögliche Lage der Extrempunkte mit der Abbildung überein.



zu A 7. $y = f(x) = x^2 + bx + c$ | $2 = 3^2 + b \cdot 3 + c$
$m = f'(x) = 2x + b$ | $1 = 2 \cdot 3 + b$

Daraus ergibt sich $b = -5$ und $c = 8$.

zu A 8. $f'(x) = 4x^3 + 10x$, $f''(x) = 12x^2 + 10$. Die notwendige Bedingung $f''(x_w) = 0$ ist nicht erfüllbar, da die Gleichung $12 \cdot x^2 + 10 = 0$ keine (reelle) Lösung besitzt.

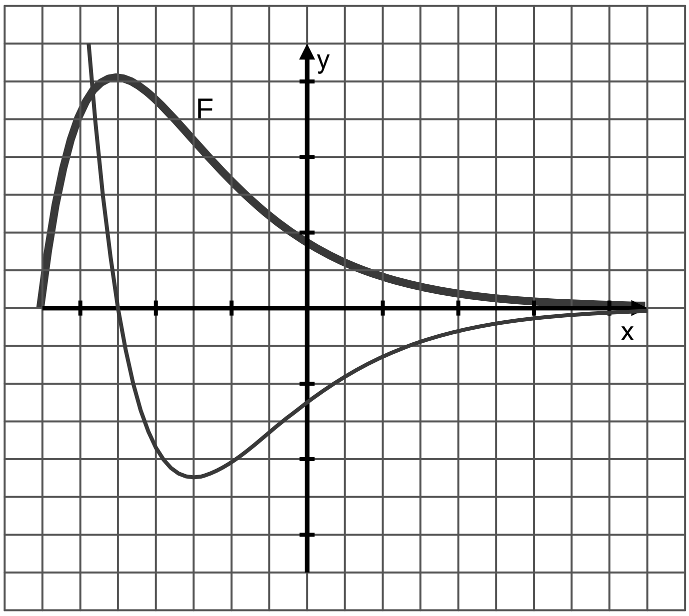
zu A 9. Da f ' zwei Extrema besitzt, muss f'' zwei Nullstellen besitzen. Deshalb muss f zwei Wendepunkte besitzen.

Da f ' eine Nullstelle x_0 besitzt (die nicht zugleich Extrempunkt von f ' ist), muss f einen Extrempunkt haben. Da $f'(x) < 0$ für $x<x_0$ und $f'(x)>0$ für $x>x_0$, muss die Monotonie von f von fallend zu steigend wechseln, es liegt also ein Tiefpunkt vor.

(Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x$.)

zu A 10. f hat eine Nullstelle bei x_0, deshalb muss F einen Extrempunkt bei $x = x_0$ besitzen. Der Vorzeichenwechsel für f erfolgt an dieser Stelle von positiv zu negativ, deshalb muss bei F ein Hochpunkt vorliegen. Für alle $x>x_0$ ist $f(x)<0$, deshalb muss F monoton fallend sein. An der Stelle, an der f einen Tiefpunkt besitzt, muss F einen Wendepunkt besitzen.

(PS: Die Gleichung von f könnte z.B. sein: $y = -0{,}5 \cdot (x+2{,}5) \cdot e^{-x}$.)



zu A 11. **a**) $m = \frac{2}{5}$, **b**) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$, **c**) 3 Lösungen, **d**) $m = 3 \cdot e^2$, **e**) 4 Tangenten

zu A 12. $f_1 \rightarrow$ i), $f_2 \rightarrow$ e), $f_3 \rightarrow$ h), $f_4 \rightarrow$ g), $f_5 \rightarrow$ d), $f_6 \rightarrow$ a)

Den Gleichungen b), c) und f) kann keiner der Graphen zugeordnet werden.

zu A 13. G1 $\rightarrow$ A6, G2 $\rightarrow$ A3, G3 $\rightarrow$ A5, G4 $\rightarrow$ A2
Den Ableitungsfunktionen A1 und A4 kann keiner der Funktionsgraphen zugeordnet werden.

zu A 14. $\int_0^2 (x+5)dx = \left(0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x\right)\Big|_0^2 = 12$

zu A 15. Die Nullstellen liegen bei $x_{01}=-3$ und $x_{02}=3$. $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$.

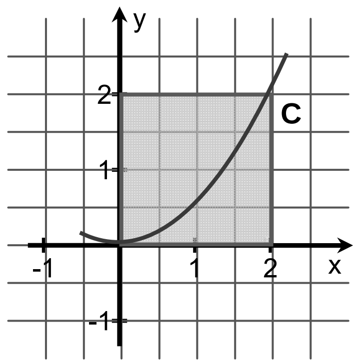
Das Integral von –3 bis 3, über f(x), nach dx beträgt 72.

zu A 16. Das Quadrat hat den Flächeninhalt $A_Q = 4$ FE. Es wird durch den Graphen in zwei Teilflächen zerlegt, A_o (oberhalb des Graphen) und A_u (unterhalb des Graphen).

$A_u = \int_0^2 0{,}5 \cdot x^2 dx = \frac{4}{3}$ FE.

Da $A_o = 4$ FE $- A_u$, ergibt sich: $A_o = \frac{8}{3}$ FE.

Das Verhältnis der Teilflächen $A_o : A_u =$ **2 : 1**.



zu A 17. Den Funktionsgraphen $f_1 - f_6$ können die gegebenen Integrale folgendermaßen zugeordnet werden:

$f_1 \to C$, $f_2 \to E$, $f_3 \to F$, $f_4 \to G$, $f_5 \to D$, $f_6 \to B$

Zu B – Analytische Geometrie

zu B 1. a) Wenn A, B, C auf einer Geraden liegen, dann sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ nicht kollinear zu $\overrightarrow{BC}$.

$\Rightarrow$ A,B,C liegen nicht auf einer Geraden.

b) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ k^2 - 2 \\ k - 4 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{AB}$ müssen kollinear sein, $\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$2 = r\cdot(-1) \qquad \Rightarrow r = -2$$

$$k^2-2 = -2\cdot(-1) \qquad \Rightarrow k^2 = 4 \;\; (k_1 = 2 \text{ oder } k_2 = -2)$$

$$k-4 = -2 \cdot 1 \qquad \Rightarrow k = 2$$

zu B 2. A, B, C bilden ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen. Wenn A, B, C auf einer Geraden lägen, dann wären $\overrightarrow{AB}$ und und $\overrightarrow{BC}$ kollinear, $\overrightarrow{AB} = r \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ nicht kollinear zu $\overrightarrow{BC}$.

$\Rightarrow$ A,B,C liegen nicht auf einer Geraden $\Rightarrow$ A,B,C bilden ein Dreieck.

zu B 3. **a)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Parallelogramm oder Rechteck

Rechteck liegt vor, wenn $\overrightarrow{AB}$ rechtwinklig zu $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -15 - 5 \neq 0$$ $\Rightarrow$ nicht rechtwinklig

b) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad M(1|-2|2)$

$$r = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

c) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 16 + 24 - 16 = \underline{\underline{24}}$

zu B 4. **a)** P(0|a|b) mit a, b $\in$ R **b**) (0|0|c) mit c $\in$ R **c**) (d|2|e) mit d, e $\in$ R

zu B 5. **a)** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5$ $\Rightarrow$ gleichschenklig

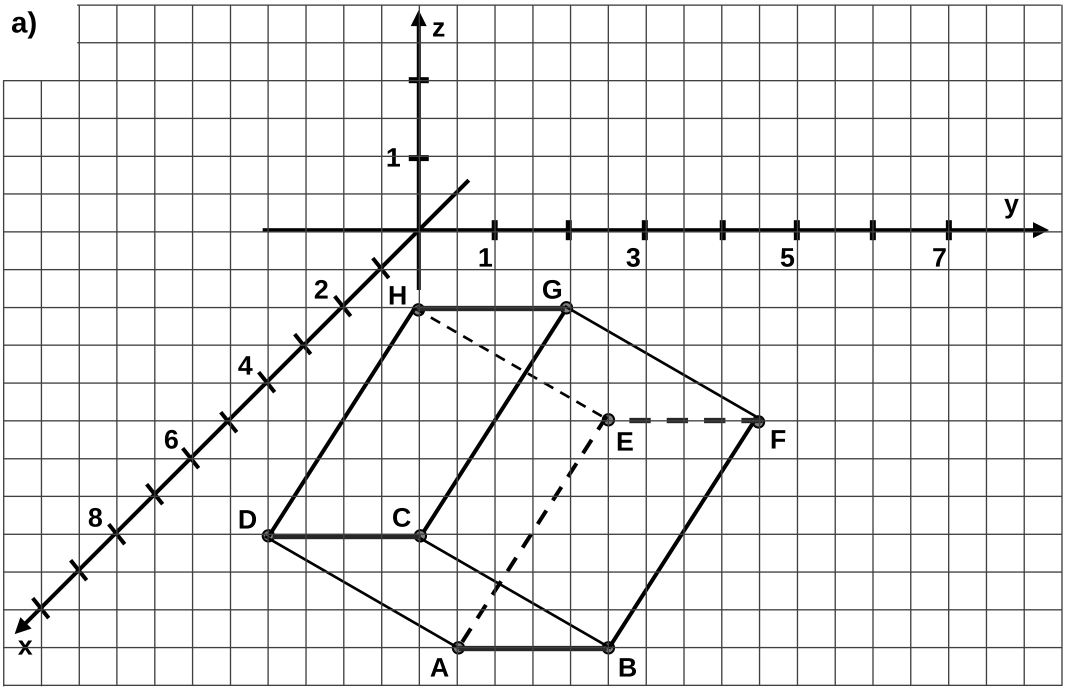
$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0$ $\Rightarrow$ rechtwinklig

b) Da die z-Komponenten von A, B und C identisch sind liegt die Grundfläche parallel zur x-y-Ebene. Höhe h = 4.

zu B 6. ABCD liegt in der x-y-Ebene, ein Punkt mit dem Abstand 7 hat Koordinate z = 7 oder z = –7. Mittelpunkt des Rechteckes ist M(3|1,5|0).

Somit ist S(3|1,5|7) (zweite Antwortmöglichkeit) die gesuchte Spitze.

zu B 7. a)



Der Punkt H hat die Koordinaten H(4|2|1).

b) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 8 + 4 = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = -8 + 4 + 4 = 0$; $\vec{c} \cdot \vec{b} = -2 - 2 + 4 = 0$

Die Skalarprodukte der Vektoren sind Null, also sind sie paarweise rechtwinklig.

c) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ M (7,5 | 4 |–1)

d) $\overrightarrow{DZ} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DZ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Z (6,5 | 4,5 | 0)

zu B 8. a) $\vec{a}$ und $\vec{d}$ sind parallel zu $\vec{x}$. **b)** $\vec{e}$ ist senkrecht zu $\vec{x}$. **c)** $|\vec{c}| = |\vec{x}|$

zu B 9. $r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ k-7 \\ 8 \end{pmatrix}$; r = 2 $\Rightarrow$ –4 = k – 7 $\Rightarrow$ k = 3 ; Probe (x-Koordinate): 2·3 = 2·3, w. A.

$\rightarrow$ Ja, es gibt genau ein k (k = 3), so dass gilt: $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$.

$0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ k-7 \\ 8 \end{pmatrix}$ = 6k – 2k + 14 + 32,   0 = 4k + 46, ...

$\rightarrow$ Ja, es gibt genau ein k (k = –11,5), so dass gilt: $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$.

zu B 10. *Die Geraden schneiden sich nicht senkrecht.* Begründung: Sie haben offensichtlich den gemeinsamen Punkt P(5|7|2), sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind und sind nicht senkrecht, da das Skalarprodukt der Richtungsvektoren –8 beträgt und somit nicht Null ist.

zu B 11. a) $\gamma = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ z+4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -4 - 32 + 6z + 24$$

$$0 = 6z - 12$$

$$z = 2$$

b) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ z+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ z+10 \end{pmatrix}$

Wenn P auf $\overline{AB}$ liegt, dann muss er auf der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{c}$ liegen,

mit $0 \le r \le 1$. Prüfung: $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ z+10 \end{pmatrix}$

6 = 6
5 = 2 + 4·r $\Rightarrow$ r = 0,75
6 = –4 + 0,75·(z+10) $\Rightarrow$ z = –2

Für z = –2 liegt der Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$.

zu B 12. a) Prüfe, ob C auf g_{AB} liegt: $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$,

in Zeile x ergäbe sich r = $\frac{1}{3}$, in Zeile z ergäbe sich r < 0. Das ist ein Widerspruch.

C liegt nicht auf g_{AB}.

b) g_{AB} ist zu einer Ebene senkrecht, deren Normalenvektor dem Richtungsvektor von g_{AB} ($\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) entspricht. Eine solche Ebene ist z. B. *E: –x + y + z = 0*.

c) Stelle Parametergleichung für E auf, die die Bestandteile von g_{AB} enthält, z. B.:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

zu B 13. $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Ebene E ist parallel zur z-Achse und damit senkrecht zur x-y-Ebene.

b) Da $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{r_g} = 0$, ist der Normalenvektor von E senkrecht zur Richtung von g. Damit ist g parallel zu E oder liegt ganz in g.
Der Punkt (1|3|3) aus g liegt auch in E, da er die Gleichung x + y = 4 erfüllt.
Somit liegt die Gerade g vollständig in E.

zu B 14. a) $\overrightarrow{n_{E1}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{E2}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{E1}} \neq r \cdot \overrightarrow{n_{E2}}$

$\Rightarrow$ E_1 ist nicht parallel zu E_2 und damit sind sie nicht identisch.

b) E_2‘: $-3 \cdot x + \mathbf{0{,}5} \cdot y + 2 \cdot z = -6$, in diesem Fall ist die Gleichung von E_2 das –2-fache der Gleichung von E_1, so dass die Ebenen damit identisch sind.

c) O(0|0|0) muss die Gleichung erfüllen, der Normalenvektor muss gleich bleiben.

$\Rightarrow$ E_3: $6 \cdot x - \cdot y - 4 \cdot z = 0$.

zu B 15. a) Koordinaten von P in die Gleichung von E einsetzen:
$2 \cdot 7 + 4 - 0 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch, $18 \neq 0$, P liegt nicht in E.

b) Für die z-Koordinate von P gilt: z=0. Deshalb muss P in der x-y-Ebene liegen.

c) P‘(–7 | 4 | 0).

d) Koordinatenweises Einsetzen der Gleichung für g in die Gleichung für E:
$2 \cdot (7+2r) + (4+r) - (-r) = 0 \Rightarrow r = -3$.
Einsetzen von r = –3 in die Gleichung für g liefert F (1 | 1 | 3).

e) (Verschiedene Lösungsmöglichkeiten.) Wenn Q Spiegelpunkt von P an E ist, dann muss $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FQ}$ gelten, da F der Durchstoßpunkt von g durch E ist und g$\perp$E.

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 1-7 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{FQ} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ -2-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FQ} \Rightarrow \text{Q ist Spiegelpunkt ...}$$

.

zu B 16. Aus den Punkten A(4|0|0), B(0|2|0) und C(0|0|3) lässt sich die Achsenabschnittsgleichung für E aufstellen: E: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$.

Mit einem der Punkte A, B oder C und zwei der Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ lassen sich auch Parametergleichungen für E bilden.

Zu C – Stochastik

zu C 1. P(A) = $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$, P(C) = 1, P(D) = $\frac{1}{2}$,

P(E) = $\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$, P(F) = $\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$, P(G) = 0, P(H) = $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$

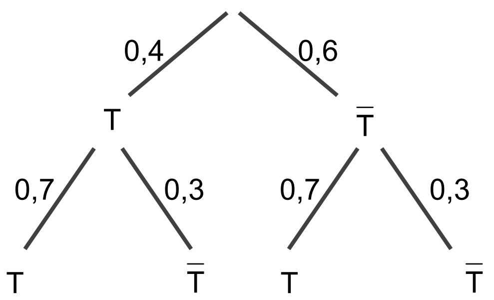
zu C 2. Vierfeld-Tafel zu den Vorgaben:
(M = Männer, F = Frauen,
R = Raucher, $\overline{R}$ = Nichtraucher)

	M	F	
R	30	35	65
$\overline{R}$	15	20	35
	45	55	100

a) 15 Männer rauchen nicht.

b) 20 % sind weibliche Nichtraucher.

zu C 3. *Baumdiagramm:*



Lösungen:
P(A) = 0,18
P(B) = 0,54
P(C) = 0,28

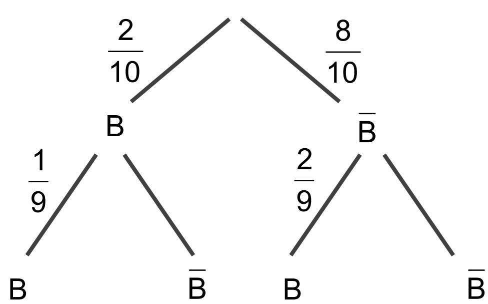
zu C 4.1) Es sind 7 weiße Kugeln enthalten.

zu C 4.2a) P(R,R) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$ (≙ 22,2 %)

zu C 4.2b) Es gibt zwei Möglichkeiten:
1. Kugel blau, 2. Kugel blau und
1. Kugel nichtblau, 2. Kugel blau.

P(x,B) = P(B,B) + P($\overline{B}$,B)

P(x,B) = $\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$



Die Wahrscheinlichkeit, beim 2. Zug eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt 20 %.

zu C 5.1) Es kommen 5 Ziffern in Frage: 9, 8, 7, 6 und 5 $\Rightarrow$ Anzahl = 5! = 120.

zu C 5.2) Richtige Lösung: 10^4 **.**

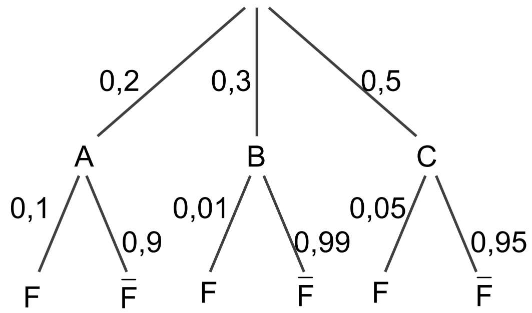
zu C 6. $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{1 \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{1 \cdot 4!} = 10 \cdot 4 \cdot 5 =$ $\underline{\mathbf{200}}$ (oder durch Überlegung)

zu C 7. Für das Ereignis gibt es vier günstige Ergebnisse des zweiten Würfels: {3; 4; 5; 6},

$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ($\triangleq$ 66,7 %).

zu C 8. A (B, C) – Gerät ist in Stadt A (B, C) hergestellt, F – Gerät ist fehlerhaft

a)

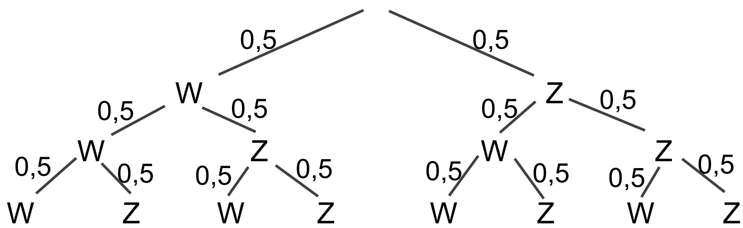


P(F) = 0,2·0,1 + 0,3·0,01 + 0,5·0,05 = 0,048

Es ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,85 % fehlerhaft.

b) $P_F(A) = \frac{\mathbf{P(A \cap F)}}{\mathbf{P(F)}} = \frac{\mathbf{0{,}2 \cdot 0{,}1}}{\mathbf{0{,}048}} = \frac{0{,}02}{0{,}048} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

zu C 9.

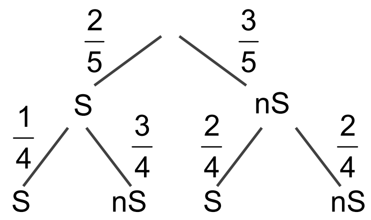


$P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{7}{8}$, $P(C) = \frac{7}{8}$, $P(D) = \frac{3}{8}$

zu C 10. R = richtig, F = falsch → mögliche Ergebnisse für das Ereignis „Bestanden":
RRRF, RRFR, RFRR, FRRR und RRRR

$P(\text{Bestanden}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$

zu C 11. S = Schmuggler,
nS = nicht schmuggelnd



a) P(A) **=** P(nS,nS) = $\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4} = 0{,}3$

b) E = {(S,S), (S,nS), (nS,S)}, E = $\bar{A}$ $\Rightarrow$ P(E) = 1 – P(A), P(E) = 0,7

zu C 12.1 **a**) $P_M(G) = \frac{6000}{6300} = \frac{20}{21} \triangleq 95{,}2\ \%$, **b**) $P_{\overline{M}}(\overline{G}) = \frac{3300}{3700} = \frac{33}{37} \triangleq 89{,}2\ \%$

zu C 12.2 $P(A) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{60}{900} = \frac{1}{15}$, $P_A(B) = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$,

$P_B(A) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$, $P(\overline{A} \cap B) = \frac{120}{900} = \frac{2}{15}$, $P_{\overline{A}}(B) = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$

zu C 13. Bernoulli-Ketten sind die Vorgänge: **D** mit n = 4, p = 0,3 (weiß) bzw. 0,7 (rot) und
F mit n = 8, p = 0,25.

zu C 14.

☐ <u>**A**</u>	☐ <u>**C**</u>	☐ <u>**B**</u>
$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$	$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$
☐ <u>**A**</u>	☐ ___	☐ <u>**D**</u>
$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}$	$1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

zu C 15. d = $\frac{1}{8}$

zu C 16.

	<1,75	>1,75	
M	0,2	**0,4**	0,6
F	0,3	0,1	0,4
	0,5	0,5	1

Lösung: p = 40%

zu C 17. S = {(1;1), (1;2), ... (6;6)} [n = 36],

E = {(1;1), (2;2), (2;3), (2;5), (3;2), (3;3), (3;5), (4;4), (5;2), (5;3), (5;5), (6;6)}

P(E) = $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Zuordnung der Aufgaben zu den Kompetenzbereichen

L1 – Algorithmus und Zahl, **L2** – Messen, **L3** – Raum und Form, **L4** – Funktionaler Zusammenhang, **L5** – Daten und Zufall

K1 – Argumentieren, **K2** – Problemlösen, **K3** – Modellieren, **K4** – Darstellungen verwenden, **K5** – Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, **K6** – Kommunizieren,

Anforderungsbereiche: **I** – Reproduzieren, **II** – Zusammenhänge herstellen, **III** – Verallgemeinern und Reflektieren.

Aufgabe	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
A - 1				X		X			X			X		
A - 2				X					X				X	
A - 3				X						X		X		
A - 4				X		X						X		
A - 5				X						X		X		
A - 6				X		X			X			X		
A - 7	X			X						X		X		
A - 8				X		X				X		X		
A - 9				X		X			X			X		
A - 10				X		X			X				X	
A - 11	X			X						X		X		
A - 12				X					X			X		
A - 13				X		X			X			X		
A - 14				X						X		X		
A - 15				X						X		X		
A - 16				X						X		X		
A - 17				X					X	X				
B - 1	X		X			X				X		X		
B - 2	X		X			X				X		X		
B - 3			X			X				X		X		
B - 4			X							X		X		
B - 5		X	X			X				X		X		
B - 6			X			X			X				X	
B - 7			X			X			X	X		X		
B - 8			X							X		X		
B - 9	X		X							X		X		
B - 10			X			X				X		X		

L1 – Algorithmus und Zahl, **L2** – Messen, **L3** – Raum und Form, **L4** – Funktionaler Zusammenhang, **L5** – Daten und Zufall

K1 – Argumentieren, **K2** – Problemlösen, **K3** – Modellieren, **K4** – Darstellungen verwenden, **K5** – Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, **K6** – Kommunizieren,

Anforderungsbereiche: **I** – Reproduzieren, **II** – Zusammenhänge herstellen,
III – Verallgemeinern und Reflektieren.

Aufgabe	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
B - 11	X		X			X				X			X	
B - 12			X			X				X		X		
B - 13			X			X				X		X		
B - 14			X			X				X		X		
B - 15	X		X							X			X	
B - 16			X							X		X		
C - 1					X					X		X		
C - 2					X					X		X		
C - 3					X					X		X		
C - 4					X					X		X		
C - 5					X					X		X		
C - 6					X					X		X		
C - 7					X					X		X		
C - 8					X					X	X	X	X	
C - 9					X					X		X		
C - 10					X					X		X		
C - 11					X					X		X		
C - 12					X					X		X		
C - 13					X			X					X	
C - 14					X					X			X	
C - 15					X					X			X	
C - 16					X			X		X		X		
C - 17					X					X		X		

Anmerkung: Die Zuordnung der Anforderungsbereiche (AFB) ist auch davon abhängig, zu welchem Lernzeitpunkt eine Aufgabe gestellt wird. Bei der hier vorliegenden Zuordnung wurde davon ausgegangen, dass die Schülerinnen und Schüler bereits analoge Aufgaben unter Einsatz von Hilfsmitteln bearbeitet haben. Fast alle Aufgabenstellungen haben die Absicht Basiskompetenzen auszuprägen und erfordern deshalb vorwiegend eine Reproduktion von bekannten Lösungswegen. Aus diesem Grunde wurde vorwiegend der AFB I zugeteilt.

www.lisum.berlin-brandenburg.de

ISBN 978-3-940987-95-2